2. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Труды геометрического семинара. М. : ВИНИТИ, 1963. Т. 2. С. 119—150.

3. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

4. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. М. : ВИНИТИ, 1966. Т. 1. С.139—189.

5. *Лумисте Ю.Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения *p*-кореперов // Труды геометрического семинара. М. : ВИНИТИ, 1974. Т. 5. С. 239—257.

6. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

*A. Kuleshov*

Center-projective frames
as equivalence classes of the second order frames

The Laptev's projective structure is constructed as a quotient bundle of the second order frame bundle over a smooth manifold.

УДК 514.75

***В.С. Малаховский, Е.П. Юрова***
*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*
yurova_e@mail.ru

## Тензорные поля на *m*-мерном многообразии гиперэллипсоидов в *n*-мерном аффинном пространстве

В n-мерном аффинном пространстве $A_n$ исследуется m-параметрические семейства $V_m$ (n – 1)-мерных невырожденных центральных нелинейчатых гиперквадрик (гиперэллипсоидов) Q. Найдены тензорные поля и определяемые ими инвариантные семейства различных геометрических образов (точек, гиперплоскостей, гиперконусов). Для каждого гиперэллипсоида семейства выделено фокальное многообразие. Для m = n – 1 построен канонический репер, концы базисных векторов которого лежат в фокальных точках гипперэллипсоида, а начало расположено в его центре.

***Ключевые слова:*** гиперэллипсоид, многообразие, тензор, фокальное многообразие, канонический репер.

**1. Система уравнений Пфаффа многообразия $V_m$.** Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве An m-параметрическое многообразие $V_m$ центральных невырожденных нелинейчатых гиперквадрик $Q$, которые в дальнейшем будем называть гиперэллипсоидами.

Отнесем многообразие $V_m$ к реперу $\Re = \{A; \vec{e}_i; \vec{e}_a\}$ $(i.j, k = \overline{1, m};\ a, b, c = \overline{m+1, n})$, где A — центр гиперэллипсоида $Q$, векторы $\vec{e}_i$ расположены в касательной m-плоскости к m-мерной поверхности (A), а векторы $\vec{e}_a$ сопряжены векторам $\vec{e}_i$ относительно $Q$ и лежат вне этой m-плоскости. В силу выбора репера (см.: [1, с. 23]).

$$\omega^a = 0, \quad \omega_i^a = S_{ik}^a \omega^k \quad (S_{ik}^a = S_{ki}^a) \tag{1.1}$$

Уравнение гиперэлипсоида $Q$ принимает вид

$$F \overset{def}{=} p_{ij} x^i x^j + q_{ab} x^a x^b - 1 = 0, \tag{1.2}$$

где $p_{ij} = p_{ji}$ , $q_{ab} = q_{ba}$ и системы $\{p_{ij}\}, \{q_{ab}\}$ не вырождены и

квадратичная форма $p_{IK} x^I x^K$ $(I, J, K = \overline{1, n})$ положительно определенная. Обозначим символом $\nabla$ ковариантное дифференцирование. Например,

$$\nabla m_{ij}^a = dm_{ij}^a - m_{kj} \omega_i^a - m_{ik} \omega_j^a + m_{ij}^b \omega_b^a . \tag{1.3}$$

Используя уравнения стационарности точки $M(x^i, x^a) \in A_n$ [1, с. 15]

$$\begin{cases} dx^i = -x^k \omega_k^i - x^a \omega_a^i - \omega^i, \\ dx^a = -x^k \omega_k^a - x^b \omega_b^a, \end{cases} \tag{1.4}$$

находим

$$dF = \nabla p_{ij} x^i x^j + \nabla q_{ab} x^a x^b - 2(p_{ij}\omega_a^i + q_{ab}\omega_j^b) x^a x^j + p_{ij}\omega^j x^i. \tag{1.5}$$

В силу невырожденности $m$-мерной поверхности (A)

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge .... \wedge \omega^m \neq 0. \tag{1.6}$$

Система структурных форм гиперэллипсоида $Q \in V_m$ имеет вид

$$\left\{ \nabla p_{ij}, \nabla q_{ab}, p_{ij}\omega_a^i + q_{ab}\omega_j^b, \quad \omega^i \right\}. \tag{1.7}$$

Учитывая неравенства (1.6) и систему структурных форм гиперэллипсоида $Q$, запишем систему уравнений Пфаффа многообразия $V_m$ в следующем виде:

$$\nabla p_{ij} = m_{ij,k}\omega^k, \quad \nabla q_{ab} = q_{ab,k}\omega^k, \quad p_{ij}\omega_a^i + q_{ab}\omega_j^b = \tilde{r}_{ja,k}\omega^k. \tag{1.8}$$

В силу невырожденности систем величин $\{p_{ij}\}, \{q_{ab}\}$ однозначно определенны системы величин $\{p^{ij}\}$, $\{q^{ab}\}$ формулами

$$p^{jk} p_{ki} = \delta_i^j, \quad q^{bc} q_{ca} = \delta_a^b. \tag{1.9}$$

Имеем

$$p^{ij}(p_{hj}\omega_a^h + q_{ab}\omega_j^b) = p^{ij}\tilde{r}_{ja,k}\omega^k = \omega_a^i + p^{ij} q_{ab} S_{jk}^b \omega^k.$$

Следовательно,

$$\omega_a^i = p^{ij}(\tilde{r}_{ja,k} - q_{ab} s_{jk}^b)\omega^k = r_{a,k}^i \omega^k. \tag{1.10}$$

Система уравнений Пфаффа многообразия $V_m$ запишется в виде

$$\nabla p_{ij} = p_{ij,k}\omega^k, \quad \nabla q_{ab} = q_{ab,k}\omega^k, \quad \omega_a^i = r_{a,k}^i\omega^k, \quad \omega_i^a = s_{i,k}^a\omega^k, \quad \omega^a = 0. \quad (1.11)$$

Замыкание системы (1.11) имеет вид

$$\Delta p_{ij,k} \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta q_{ab,k} \wedge \omega^k = 0, \quad \nabla r_{a,k}^i \wedge \omega^k = 0, \quad \nabla s_{ik}^a \omega^k = 0, \quad (1.12)$$

где

$$\begin{cases} \Delta p_{ij,k} = \Delta p_{ij,k} + (p_{lj}s_{ih}^a + P_{il}s_{jh}^a)r_{a,k}^l\omega^k, \\ q_{ab,k} = \nabla q_{ab,k} + (q_{cb}r_{a,l}^i + q_{ac}r_{b,l}^i)S_{ik}^c\omega^k. \end{cases} \quad (1.13)$$

**2. Тензорные поля на многообразии $V_m$, порожденные первой дифференциальной окрестностью.** Из формул (1.4) следует

$$\delta x^i = -x^k\pi_k^i, \quad \delta x^a = -x^b\pi_b^a, \quad (2.1)$$

где $\delta$ означает дифференцирование по вторичным параметрам, а из обозначений

$$\pi_k^i \overset{def}{=} \omega_k^i\Big|_{\omega^i=0}, \quad \pi_b^a = \omega_b^a\Big|_{\omega^i=0} \quad (2.2)$$

вытекает, что системы величин $\{x^i\}$, $\{x^a\}$ образуют один раз контравариантные тензоры, т. е. векторы [2]. Уравнения

$$x^i = 0, \quad x^a = 0 \quad (2.3)$$

определяют инвариантные подпространства размерности n-m и m соответственно.

Из (1.12) следует, что системы величин $\{m_{ij,k}\}, \{n_{ab,k}\}$, $\{r_{a,k}^i\}, \{s_{ik}^a\}$ являются тензорами соответствующей валентности.

Используя дважды контравариантные симметрические тензоры $p^{ij}$, $q^{ab}$, получаем ко- и контравариантные векторы:

$$\begin{cases} p_i = p^{jk} p_{jk,i}, \quad q_i = q^{ab} q_{ab,i}, \quad p^i = p^{ik} p^{jh} p_{jh,k}, \\ q^i = p^{ik} q^{ab} q_{ab,k}, \quad s^a = p^{ij} s^a_{ij}, \quad r_a = r^i_{a,i}, \quad r^a = q^{ac} r^i_{c,i}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ковариантные векторы $\{p_i\},\{q_i\},\{r_a\}$ задают в $n$-мерном аффинном пространстве $A_n$ инвариантные гиперплоскости, проходящие через центр $A$ и содержащие касательную плоскость к поверхности ($A$) (первые две) и ($n$–$m$) плоскость (третья)

$$p_i x^i = 0, \quad q_i x^i = 0, \quad r_a x^a = 0. \tag{2.5}$$

Контравариантные векторы $\{m^i\},\{n^i\},\{r^a\},\{s^a\}$ задают инвариантные точки

$$\vec{M} = \vec{A} + p^i \vec{e}_i, \quad \vec{N} = \vec{A} + q^i \vec{e}_i, \quad \vec{R} = \vec{A} + r^a \vec{e}_a, \quad \vec{S} = \vec{A} + s^a \vec{e}_a. \tag{2.6}$$

Дважды ковариантный тензор

$$t_{ij} = r^h_{a,i} s^a_{jh} \tag{2.7}$$

определяет в подпространстве $x^a = 0$, т.е. в касательной m-плоскости к m-мерной поверхности ($A$), ($m$–1)-мерный конус с вершиной в точке $A$:

$$t_{ij} x^i x^j = 0. \tag{2.8}$$

Аффинор

$$\overset{*}{r}{}^j_i = p^{kh} s^a_{kh} r^j_{a,i} \tag{2.9}$$

определяет контравариантные векторы

$$\overset{*}{p}{}^i = m^k \overset{*}{r}{}^i_k, \quad \overset{*}{q}{}^i = n^k \overset{*}{r}{}^i_k, \tag{2.10}$$

задающие в этой касательной m-плоскости инвариантные точки

$$\vec{M}^* = \vec{A} + \overset{*}{p}{}^k \vec{e}_k, \quad \vec{N}^* = \vec{A} + \overset{*}{q}{}^k \vec{e}_k. \tag{2.11}$$

**3. Фокальное многообразие гиперэллипсоида** $Q \in V_m$.

**Определение 3.1.** *Фокальной точкой* гиперэллипсоида $Q \in V_m$ называется точка касания (с точностью до бесконечно малых второго порядка) двух смежных гиперэллипсоидов многообразия $V_m$.

Фокальным многообразием гиперллипсоида $Q$ называется множество всех его фокальных точек.

Учитывая уравнения (1.8) в формуле (1.5) находим

$$dF = F_k \omega^k, \tag{3.1}$$

где

$$F_k = p_{ij,k} x^i x^j + q_{ab,k} x^a x^b - 2(p_{ij} r^i_{a,k} + q_{ab} s^b_{jk}) x^a x^j + \delta^j_k p_{ij} x^i. \tag{3.2}$$

Из определения (3.1) следует, что фокальное многообразие гиперэллипсоида $Q \in V_m$ определяется системой алгебраических уравнений

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, ...., \quad F_m = 0. \tag{3.3}$$

Эта система содержит $m + 1$ уравнений второй степени и определяет, следовательно $(n - m - 1)$-мерное фокальное многообразие гиперэллипсоида $Q$ порядка $2^{m+1}$.

**4. Многообразие $V_{n\text{-}1}$. Канонический репер.** Рассмотрим случай $m = n - 1$. Тогда индексы $a,b,c$ принимают только одно значение $a = b = c = n$, и эти индексы можно исключить в компонентах геометрических объектах. Обозначим

$$q_{nn} \overset{def}{=} q, \quad q_{nn,k} \overset{def}{=} q_k, \quad r^i_{n,k} = r^i_k, \quad s^n_{ik} = s_{ik}. \tag{4.1}$$

Система уравнений Пфаффа многообразия $V_{n\text{-}1}$ запишется в виде (1.11):

$$\nabla p_{ij} = p_{ij,k}\omega^k, \quad dq - q\omega^n_n = q_k\omega^k, \quad \omega^i_n = r^i_k\omega^k, \quad \omega^n_i = s_{ik}\omega^k. \tag{4.2}$$

Имеем (1.2), (3.2)

$$\begin{cases} F = p_{ij}x^i x^j + q(x^n)^2 - 1 = 0, \\ F_k = p_{ij,k}x^i x^j + q_k(x^n)^2 - 2(p_{ij}r_k^i + qs_{jk})x^n x^j + \delta_k^j p_{ij}x^i. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система алгебраических уравнений (4.3) принимает следующи вид:

$$\begin{cases} p_{ij}x^i x^j + q(x^n)^2 - 1 = 0, \\ p_{ij,k}x^i x^j + q_k(x^n)^2 - 2(p_{ij}r_k^i + qs_{jk})x^n x^j + \delta_k^j p_{ij}x^i = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Эта система определяет $2^m$ фокальных точек.

Канонический репер многообразия $V_{n-1}$ образован так, что концы базисных векторов $\vec{e}_k$ совмещаются с любыми n фокальными точками (при $n \le 2^m$ такой выбор всегда можно осуществить). Из выражения (4.4) следует

$$q = 1, \quad p_{11} = p_{22} = ... = p_{n-1\ n-1} = 1, \quad p_{ij,k} - \delta_k^i p_{ii} = 0. \quad (4.5)$$

Подробное исследование многообразий $V_{n-1}$ дано в работах [3—5].

### *Список литературы*

1. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—283.

3. *Сопина Е.П.* Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в *n*-мерном аффинном пространстве // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1976. Вып. 7. С. 105—110.

4. *Сопина Е.П.* О полях геометрических объектов на многообразии $V_{n-1}$ // Там же. 1981. Вып. 12. С. 93—95.

5. *Сопина Е.П.* Об инвариантных образах, ассоциированных с конгруэнцией центральных невырожденных гиперквадрик // Там же. 1986. Вып. 17. С. 83—86.

*V. Malakhovsky, E. Yurova*

## Tensor fields on *m*-dimensional manifold of hyperellipsoids in *n*-dimensional affine space

In n-dimensional affine space $A_n$ $m$-parametric families $V_m$ $(n-1)$-dimensional nondegenerates central nonruled hyperquadrics (hyperellipsoids) Q are investigated. Tensor fields and invariant families of different geometric images (points, hyperplanes, hypercones) are found. Focal manifold for each hyperellipsoid is defined. For the case $m=n-1$ canonical frame with ends of base vectors in focal points and original in the center is constructed.

УДК 514.76

***К. В. Полякова***
*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*
polyakova_@mail.ru

## Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков

Продолжается исследование расслоений реперов 1-го и 2-го порядков и касательных расслоений 1-го и 2-го порядков к расслоению линейных реперов на многообразии, проводимое в работах [2—4] и опирающееся на структурные уравнения и деривационные формулы. Способом Лаптева — Лумисте заданы аффинные связности 1-го и 2-го порядков. Получены разложения компонент аффинной связности 1-го и 2-го порядков с помощью слоевых координат того же порядка, что и связность, и некоторых функций, зависящих от базисных и слоевых координат низшего порядка, чем порядок связности. Рассмотрены некоторые специальные связности, названные простейшими и естественными; указаны их свойства.

***Ключевые слова:*** касательные расслоения 1-го и 2-го порядков, базисные и слоевые координаты, структурные уравнения, аффинные связности 1-го и 2-го порядков, ковариантные производные.